

Total number of printed pages-11

3 (Sem-3) MAT

2021

(Held in 2022)

MATHEMATICS

(General)

(Calculus : Methods and Applications)

Full Marks : 80

Time : Three hours

***The figures in the margin indicate
full marks for the questions.***

Answer either in English or in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Let $f(x) = e^{2x}$. Find $f^n(0)$.

$f(x) = e^{2x}$ হ'লে $f^n(0)$ ৰ মান লিখা।

(b) State Leibnitz's theorem.

লিৰনিজৰ উপপাদ্য লিখা।

Contd.

- (c) Verify Rolle's Theorem for the function
 $f(x) = x^2, \quad x \in [2, 3]$

$f(x) = x^2, \quad x \in [2, 3]$ ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত
 ৰোলৰ উপপাদ্য প্ৰযোজ্য হয়নে? পৰীক্ষা কৰা।

- (d) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

- (e) What is the value of $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$?

$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$ -ৰ মান কি হ'ব, লিখা।

- (f) Using Maclaurin's series, write down the expansion of e^x .

মেক্লৰিণৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি e^x ৰ বিস্তৃতি লিখা।

- (g) If $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$, then find $f_y(0, 0)$.

যদি $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$, তেনেহ'লে
 $f_y(0, 0)$ -ৰ মান উলিওৱা।

- (h) State Cauchy's Mean Value Theorem.
 কোচিৰ মধ্য মান উপপাদ্যটো লিখা।

- (i) What are the asymptotes parallel to the x -axis of the curve
 $(y^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = 0$?

$(y^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = 0$ বক্ৰলৈ x -অক্ষৰ
 সমান্তৰাল অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাবোৰ কি কি?

- (j) State the degree and the order of the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ ঘাত আৰু ক্ৰম লিখা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Find the reduction formula for
 $\int \sin^n x \, dx$.

$\int \sin^n x \, dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰ উলিওৱা।

(b) Find the n th derivative of $\frac{1}{ax+b}$.

$\frac{1}{ax+b}$ ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

(c) Solve (সমাধান কৰা) : $(D^2 + 6D + 5)y = 0$

(d) Show that the following function (দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো) —

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x=0$ ($x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন)

(e) Find the maximum and minimum values of :

গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

3. Answer **any four** questions : $5 \times 4 = 20$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that the differential equation
 $(2x^2 + 4y)dx + (4x + y - 1)dy = 0$

is exact and hence solve it.

$$(2x^2 + 4y)dx + (4x + y - 1)dy = 0$$

অৱকল সমীকৰণটো যথার্থ বুলি প্ৰমাণ কৰি সমাধান কৰা।

(b) A population grows at the rate of 5% in a year. How long does it take to become double?

জনসংখ্যা বছৰি 5% হাৰত বৃদ্ধি হয়। সেই জনসংখ্যা কিমান বছৰত দুগুণ হব?

(c) Prove that for the cardioid

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad \frac{\rho^2}{r} \text{ is constant,}$$

where ρ is the radius of curvature at any point on the curve.

প্ৰমাণ কৰা যে $r = a(1 + \cos \theta)$ কাৰ্ডিয়ডৰ যিকোনো

বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ ρ হ'লে $\frac{\rho^2}{r}$ ৰাশিটো এটা ধ্ৰুৱক হ'ব।

- (d) If $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, prove by using Leibnitz's Theorem that :

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

$y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ লৈ লিৰনিজ-ৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

- (e) If (যদি) $u(x, y) = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$ (হয়), $xy \neq 0$ then show that (তেনেহ'লে দেখুওৱা যে),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

- (f) If (যদি) $0 < a < b$ (হয়) prove that (তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

4. Answer **any four** questions : $10 \times 4 = 40$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Solve **any two** : $5 \times 2 = 10$

যিকোনো দুটাৰ সমাধান উলিওৱা :

(i) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$

Given that (দিয়া আছে যে) when $t = 0$,

then (তেতিয়া) $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 2$

(ii) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^4$

(iii) $(D^2 + 4D + 3)y = e^{-3x}$

(iv) $(D^2 - 4)y = \sin 2x$

- (b) $5+5=10$

- (i) State and prove Euler's Theorem on homogeneous functions of two variables.

দুটা চলকৰ সমঘাত ফলনৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

- (ii) If (যদি) $z = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ (হয়),
then using Euler's theorem,
prove that (তেনেহঁলে অয়লাৰৰ
উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে) —

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan z$$

- (c) Evaluate **any two** : 5×2=10
যিকোনো দুটাৰ মান উলিওৱা :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x) \frac{1}{(\log x)}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(iii) $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta$

(d)

- (i) Find the total length of the astroid 5+5=10
 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

এষ্টাইড $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য
উলিওৱা।

- (ii) If $f(x) = f(a+x)$, then prove that

$$\int_0^{na} f(x) dx = n \cdot \int_0^a f(x) dx.$$

যদি $f(x) = f(a+x)$ হয়, তেনেহঁলে প্ৰমাণ
কৰা যে

$$\int_0^{na} f(x) dx = n \cdot \int_0^a f(x) dx$$

- (e) (i) Calculate $f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$.
Also show that f is continuous at
(0,0); where — 2+2+4=8

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ ৰ মান উলিওৱা আৰু
দেখুওৱা যে f , বিন্দু (0,0)-ত অবিচ্ছিন্ন যত—

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- (ii) Give the geometrical interpretation
of Lagrange's Mean Value
Theorem. 2

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা
দাঙি ধৰা।

(f)

$$4+4+2=10$$

(i) Obtain a reduction formula for

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \text{ ৰ লঘুকৰণ সূত্র উলিওৱা।}$$

(ii) Find (উলিওৱা) :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

(iii) Evaluate (মান নির্ণয় কৰা) :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx$$

(g)

$$5+5=10$$

(i) Find the area bounded by one arc of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ and the x-axis.

$$\text{চাইক্লইড } x = a(\theta - \sin \theta),$$

$$y = a(1 - \cos \theta) \text{ ৰ এটা সম্পূৰ্ণ ধনুচাপ}$$

আৰু x-অক্ষই আগুৱা ক্ষেত্রৰ কালি উত্তিওৱা।

(ii) Show that $e^{\int P dx}$ is an integrating factor of the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

দেখুওৱা যে বৈথিক অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \text{ ৰ}$$

$e^{\int P dx}$ এটা অনুকলক গুণক।

(h) Evaluate **any two** :

$$5 \times 2 = 10$$

যিকোনো দুটাৰ মান নির্ণয় কৰা :

$$(i) \int_0^{\pi} x \log \sin x dx$$

$$(ii) \int \frac{\cos x dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$
