Total number of printed pages–8

3 (Sem–1) MAT

2021

(Held in 2022)

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese*

1. Answer the following questions : $1\times7=7$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If (যদি) $b>0$, then (তেন্তে) $arg\,(ib)=?$

(b) For *any two* complex numbers Z_1 and Z_2

Z_1 আৰু Z_2 *দুটা যিকোনো* জটিল সংখ্যাৰ বাবে

$|Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2=?$

Contd.

(c) $f(x)=0$ is a cubic equation and $(x+\alpha)$ is a factor of $f(x)$. Write all the roots of the equation $f(x)=0$ if $\alpha+i\beta$ is one of the roots.

$f(x)=0$ এটা ত্রিঘাত সমীকৰণ আৰু $f(x)$ ৰ এটা উৎপাদক $(x+\alpha)$. $f(x)=0$ সমীকৰণৰ আটাইবোৰ মূল লিখা যদি $\alpha+i\beta$ এটা মূল হয়।

(d) Find atmost how many roots are there for the equation $x^n-1=0$.

$x^n-1=0$ সমীকৰণৰ সৰ্বোচ্চ কিমানটা মূল থাকিব পাৰে ?

(e) State De Moivre's theorem.

ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(f) If α, β, γ are the roots of $cx^3+bx^2+ax+1=0$, then find the equation whose roots are $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$.

$cx^3+bx^2+ax+1=0$ সমীকৰণৰ মূল α, β আৰু γ হলে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(g) If (যদি) $Z=1+i$, then (তেন্তে) $arg\, z=?$

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If α, β, γ are the roots of $x^3-px^2+qx-r=0$, then find the value of $\sum\alpha$, $\sum\alpha\beta$.

$x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β, γ হলে, $\sum\alpha$ আৰু $\sum\alpha\beta$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) If a, b, c are real, then prove that

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

যদি a, b, c বাস্তৱ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

(c) If $\{u_n\}$ is null sequence (i.e., $u_n \to 0$), then prove that $\{|u_n|\}$ is also a null sequence.

অনুক্ৰম $\{u_n\}$ ই যদি শূন্যলৈ অভিসৰণ কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\{|u_n|\}$ অনুক্ৰমটো শূন্যলৈ অভিসৰণ কৰিব।

(d) Find $mod\, z$ and $arg\ z$, when $z=-i$

$z=-i$ হলে $mod\, z$ আৰু $arg\ z$ নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer ***any three*** of the following questions : 5×3=15

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ *যিকোনো তিনিটাৰ* উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If (যদি) $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$,

$y=\cos\beta+i\sin\beta$,

$z=\cos\gamma+i\sin\gamma$ and (আৰু)

$x+y+z=0$,

then show that (তেন্তে দেখুউৱা যে)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

(b) If n is a positive integer, then prove that

যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{2.4.6\cdots 2n}{1.3.5\cdots(2n-1)}>\sqrt{2n+1}$$

(c) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$i^i=e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

(d) Show that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$

(e) Show that (দেখুউৱা যে)

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots$$

4. Answer ***any two*** : 5×2=10

যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Solve by Cardon's method :

কাৰ্ডন পদ্ধতিতে সমাধান কৰা ঃ

$$x^3-6x-9=0$$

(b) Prove that every absolutely convergent series is convergent.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক পৰম অভিসাৰী শ্ৰেণী এটা অভিসাৰী।

(c) Apply Cauchy-Schwarz inequality to prove that

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\geq 9$$

where a, b, c and x, y, z are positive real numbers.

কছি-শ্বৰাৰ্জৰ অসমতাৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\geq 9$$

যত a, b, c আৰু x, y, z ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা।

(d) Test the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা ঃ

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{5}+\cdots$$

5. Answer ***any two*** of the following questions : 5×2=10

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ *যিকোনো দুটাৰ* উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$, show that the sequence $\{u_n\}$ is monotonic increasing and bounded.

যদি $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$, দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান আৰু পৰিবদ্ধ।

(b) If (যদি) $a>0$, $b>0$, $c>0$ and (আৰু) $a+b+c=1$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$8abc\leq(1-a)(1-b)(1-c)\leq\frac{8}{27}$$

(c) Examine the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা ঃ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots\text{to }\infty$$

(d) If α,β,γ are the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, then find the value of $\sum\alpha^3\beta^3$.

যদি α,β,γ, $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণটোৰ বীজ হয়, তেন্তে $\sum\alpha^3\beta^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer ***any two*** of the following questions : $5 \times 2 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ পৰা *যিকোনো দুটাৰ* উত্তৰ কৰা :

(a) If (যদি) $\tan\log(x+iy) = a+ib$,

where (যত) $a^2+b^2 \neq 1$,

prove that (প্ৰমাণ কৰা)

$$\tan\log\left(x^2+y^2\right) = \frac{2a}{1-a^2-b^2}$$

(b) Show that (দেখুউৱা যে)

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{8^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{8^5}\right) \cdots$$

(c) If a, b, c denote the sides of a triangle and $2s = a+b+c$, then prove that

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

যদি a, b, c কোনো ত্ৰিভুজৰ বাহু হয় আৰু $2s = a+b+c$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

(d) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$$
