

Total number of printed pages-11

3 (Sem-3) MAT

2022

MATHEMATICS

(General)

Full Marks : 80

Time : Three hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

Answer either in English or in Assamese.

1. Answer the following questions: $1 \times 10 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Write down the n th derivative of
 $y = \log x$.

$y = \log x$ ৰ n তম অৱকলজ লিখা।

- (b) Is it false that the sum of two
continuous functions is continuous?

দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ যোগফল অবিচ্ছিন্ন—এই উক্তিটো
মিছা নেকি?

Contd.

(c) State Cauchy's mean value theorem.

কোচিৰ মধ্যমান উপপাদ্যটো লিখা।

(d) Show that every constant function is continuous.

দেখুৱা যে ধ্ৰুৱীয় ফলন এটা অবিচ্ছিন্ন।

(e) Is a continuous function at a point necessarily a derivable function at that point?

কোনো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হোৱা ফলনটো সেই বিন্দুটোত অৱকলনীয় হ'বইনে?

(f) Define curvature of a curve at a point on it.

বক্ৰ এটাৰ কোনো বিন্দুত বক্ৰটোৰ বক্ৰতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) Find $\frac{dy}{dx}$, where $y = e^{\frac{1}{\sqrt{\cot x}}}$.

$\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা য'ত $y = e^{\frac{1}{\sqrt{\cot x}}}$.

(h) Find the derivative of x^6 w.r.t. x^2 .

x^2 সাপেক্ষে x^6 ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(i) Using Maclaurin's series, write down the expansion of $\sin x$ in an infinite series.

মেকলৰিনৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি $\sin x$ ৰ অসীম শ্ৰেণীৰ বিস্তৃতিটো লিখা।

(j) Is the integrating factor of a differential equation $Mdx + Ndy = 0$ unique?

$Mdx + Ndy = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ অনুকলন উৎপাদকটো অদ্বিতীয়নে?

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find the n th derivative of $y = \frac{1}{1+x}$.

$y = \frac{1}{1+x}$ ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

(b) State Rolle's theorem.

ৰোলৰ উপপাদ্যটো লিখা।

- (c) Examine the continuity of the function f defined by

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

f ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা বিচাৰ কৰা, য'ত

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

- (d) State the geometrical interpretation of Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা লিখা।

- (e) State Euler's theorem on homogeneous functions.

সমসত্ত্ব ফলনৰ অয়েলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

3. Answer **any five** questions : $5 \times 5 = 25$

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) If (যদি) $y = \sin^{-1} x$, prove that (প্ৰমাণ কৰা)—

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0;$

(ii) $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - x^2y_n = 0.$

- (b) If (যদি) $a < b$, prove that (প্ৰমাণ কৰা)

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Hence prove that (হি়াৰ পৰা প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

- (c) Using Euler's theorem, show that if

$$z = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right), \text{ then } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

অয়েলাৰৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে, যদি

$$z = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right) \text{ হয়, তেন্তে } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

- (d) Tangents are drawn from origin to the curve $y = \sin x$. Prove that their points of contact lie on $x^2 y^2 = x^2 - y^2$.

$y = \sin x$ বক্ৰলৈ মূলবিন্দুৰ পৰা স্পৰ্শক অংকন কৰা হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে স্পৰ্শ বিন্দুসমূহ $x^2 y^2 = x^2 - y^2$ ত থাকিব।

(e) Find the area of the asteroid

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এষ্টেৰয়েডটোৰ কালি নিৰ্ধাৰণ কৰা।

(f) Prove that $e^{\int P dx}$ is an integrating factor

of the equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ and solve

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

প্রমাণ কৰা যে $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ সমীকৰণৰ $e^{\int P dx}$ এটা অনুকলন উৎপাদক।

সমাধান কৰা :

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

(g) Solve :

সমাধান কৰা :

$$(i) (D^2 - 4)y = e^x \cdot \sin 2x$$

$$(ii) (D^3 + 8)y = x^4 + 2x + 1$$

4. Answer **any four** questions : $5 \times 4 = 20$

যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If (যদি) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x$, prove that (প্রমাণ কৰা

যে) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Hence evaluate (ইয়াৰ

পৰা উলিওৱা) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$.

(b) Find the asymptotes of the curve $(x^3 + a^3)y = bx^3$ (i) parallel to x -axis, and (ii) parallel to y -axis.

$(x^3 + a^3)y = bx^3$ বক্ৰৰ (i) x -অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ, আৰু (ii) y -অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ অনন্তস্পৰ্শক উলিওৱা।

(c) Find the radius of curvature for the curve $y = 4 \sin x - \sin 2x$ at the point $x = \frac{\pi}{2}$.

$y = 4 \sin x - \sin 2x$ বক্ৰৰ $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

(d) Evaluate (**any two**) :

যিকোনো দুটাৰ মান উলিওৱা :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x) \frac{1}{\log x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(e) Evaluate (**any two**) :

যিকোনো দুটাৰ মান উলিওৱা :

(i) $\int \frac{\cos x}{3 \cos x + 4 \sin x} dx$

(ii) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$

(iii) $\int \sqrt{\tan x} dx$

(f) Evaluate (**any two**) :

যিকোনো দুটাৰ মান উলিওৱা :

(i) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \log \cos x dx$

(iii) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$

5. Answer **any three** questions : $5 \times 3 = 15$

যিকোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Form the differential equation which represents the family of functions $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$, where α is arbitrary.

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$ সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা ফলন সমষ্টিৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰা, য'ত α স্বেচ্ছ।

(b) Solve (সমাধান কৰা) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Given that (দিয়া আছে), when (যেতিয়া)
 $t = 0$, then (তেতিয়া) $x = 0$ and (আৰু)

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

(c) Solve :

সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$$

(d) Solve :

সমাধান কৰা :

$$(i) \frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

$$(ii) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}$$

(e) Find the Cartesian equation of a curve for which the tangent is of constant length.

যি বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ দীঘ ধ্ৰুবক সেই বক্ৰটোৰ কাৰ্টিয়
সমীকৰণ উলিওৱা।