Total number of printed pages–36

3 (Sem–1/CBCS) MAT HG/RC

2022

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Attempt either MAT–HG–1016 ***or*** MAT–HG–1026

For Regular

Attempt MAT–RC–1016

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

OPTION–A

Paper : MAT–HG–1016/MAT–RC–1016

(Calculus)

Full Marks : 80

Time : Three hours

Contd.

1. Answer ***any ten*** questions : 1×10=10

যিকোনো দহটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the value of $\sin 1680°$.

$\sin 1680°$ ৰ মান উলিওৱা।

(b) Write the range of the function

$$f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^2+4}.$$

$f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^2+4}$ ফলনটোৰ পৰিসৰ লিখা।

(c) Write the equation which shifted the graph of the equation $x^2 + y^2 = 49$ into 3 units down and 2 units left.

$x^2 + y^2 = 49$ সমীকৰণৰ লেখটোক 3 একক ওললৈ আৰু 2 একক বাওঁফালে স্থানান্তৰ কৰা সমীকৰণটো উলিওৱা।

(d) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x)$

(e) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$

(f) Is $f(x) = \sin x$ one-one on the interval $[0, \pi]$?

$f(x) = \sin x$ ফলনটো $[0, \pi]$ অন্তৰালত একৈকি হয়নে?

(g) Is the function $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ continuous over its domain $[-2, 2]$?

$[-2, 2]$ আদিক্ক্ষেত্ৰত ফলন $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ অবিচ্ছিন্ন হয়নে?

(h) What is the nth derivative of e^{ax} ?

e^{ax} ৰ nতম অবকলজটো কি হ'ব?

(i) State whether the statement is true *or* false :

The function $y = |x|$ is differentiable in $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা ঃ ফলন $y = |x|$, $(-\infty, 0)$ আৰু $(0, \infty)$ অন্তৰালত অৱকলন।

(j) Write the Maclaurin series for e^x.

e^x ৰ মেক্লৰিন শ্ৰেণীটো লিখা।

(k) If $\lim_{x \to a} f(x) = 3$, then find the value of $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$

যদি $\lim_{x \to a} f(x) = 3$ তেন্তে $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(l) Find the value of $\sin\left(arc\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$.

$\sin\left(arc\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(m) State whether the statement is true *or* false :

The function $f(x) = \cos x$ is increasing in the interval $[0, \pi]$.

তলৰ উক্তিটো সঁচা *নে* মিছা লিখা ঃ

ফলন $f(x) = \cos x$, $[0, \pi]$ অন্তৰালত বৰ্ধমান হ'ব।

(n) State the Leibnitz theorem.

লীবনিট্জৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(o) Find the average rate of change of $y = x^2 + 1$ w. r. t. x over the interval $[3, 5]$.

x সাপেক্ষে $[3, 5]$ অন্তৰালত $y = x^2 + 1$ ৰ গড় হাৰ মান উলিওঁৱা।

(p) Sketch the graph of $y = |x|$ shifted 2 units to the right and 1 unit down.

2 একক সোঁফালে আৰু 1 একক তললৈ স্থানান্তৰ কৰা, $y = |x|$ ফলনটোৰ লেখ অংকন কৰা।

(q) State whether the statement is true *or* false :

An equation of a curve of degree n has at most n asymptotes.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা ঃ

এটা n ঘাতৰ বক্ৰৰ সমীকৰণৰ সৰ্বাধিক n অনন্তস্পৰ্শী আছে।

(r) State whether the statement is true *or* false :

The slope of the tangent line to the curve $y = x^2 + 4x + 7$ at $x = 1$ is 6.

তলৰ উক্তিটো সঁচা *নে* মিছা লিখা ঃ

$x = 1$ বিন্দুত $y = x^2 + 4x + 7$ বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা 6।

2. Answer ***any five*** questions : 2×5=10

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$$

(b) Show that $f(x) = \frac{x^3}{4}$ and $g(x) = (4x)^{\frac{1}{3}}$ are inverses of one another.

দেখুওৱা যে $f(x) = \frac{x^3}{4}$ আৰু $g(x) = (4x)^{\frac{1}{3}}$ এটা আনটোৰ বিপৰীত।

(c) Sketch the graph of the function $f(x) = \sqrt[3]{x}$ and find its domain and range.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ ফলনটোৰ লেখ আঁকা আৰু ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওৱা।

(d) If $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, then find $\lim_{x \to 4} f(x)$.

যদি $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ তেন্তে $\lim_{x \to 4} f(x)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) If (যদি) $f = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2f.$$

(f) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

(g) Find the derivative of $tan\, x$ w.r.t. $sin\, x$.

$sin\, x$ সাপেক্ষে $tan\, x$ ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(h) If the function $f(x)=\begin{cases}5x-1, & x\le 1\\ kx^3, & x>1\end{cases}$ is continuous everywhere, then find the value of k.

যদি $f(x)=\begin{cases}5x-1, & x\le 1\\ kx^3, & x>1\end{cases}$

ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হয়, k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(i) If $y=e^{a\sin^{-1}x}$, prove that $(1-x^2)y_2-xy_1-a^2y=0$.

যদি $y=e^{a\sin^{-1}x}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(1-x^2)y_2-xy_1-a^2y=0$

(j) Show that $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ does not exists

দেখুওৱা যে, $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ স্থিত নহয়।

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find $\frac{dy}{dx}$ if $y^2=x^2+\sin xy$

$\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা যদি $y^2=x^2+\sin xy$

(b) Show that the point $(2, 4)$ lies on the curve $x^3+y^3-9xy=0$. Also find the tangent and normal to the curve at $(2, 4)$. 1+(2+2)=5

দেখুওৱা যে $(2, 4)$ বিন্দুটো $x^3+y^3-9xy=0$ বক্ৰৰ ওপৰত আছে। আকৌ $(2, 4)$ বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(c) Show that the area of the triangle ABC is $\frac{1}{2}bc\sin A$.

দেখুওৱা যে ABC ত্ৰিভুজৰ কালি $\frac{1}{2}bc\sin A$

(d) Evaluate using L'Hospital's rule :

এল' হ'চপিতাল নীতি প্ৰয়োগ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

Contd.

(e) Find the maximum and minimum value of the function. 2½+2½=5

$y = x^3 - 2x^2 + x + 6$

ফলন $y = x^3 - 2x^2 + x + 6$ ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা।

(f) Apply ε - δ definition to show that the following function is continuous at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ε - δ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো $x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

(g) If (যদি) $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$, show that (দেখুওৱা যে)

(i) $(1 - x^2) y_2 - 3xy_1 - y = 0$

(ii) $(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 3) xy_{n+1} - (n + 1)^2 y_n = 0$ 3+2=5

(h) Using definition find $\frac{\partial u}{\partial x}$ at (1,1) if

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি (1,1) বিন্দুত $\frac{\partial u}{\partial x}$ ৰ মান উলিওৱা

য'ত $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4. Answer ***any four*** questions : 10×4=40

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) (i) State and prove Rolle's theorem. 5

ৰ'লৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(ii) If u is a homogeneous function of x and y of degree n, show that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1) u$$

5

u এটা n-ঘাতৰ x আৰু y ৰ সুষম ফলন হ'লে, দেখুওৱা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1) u$$

(b) If $z = \log \tan\left(\frac{y}{x}\right)$, then verify

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

যদি $z = \log \tan\left(\frac{y}{x}\right)$, তেন্তে সত্যতা প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

(c) (i) If $u = x \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + y \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, find the value of

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \text{ at } (1,1)$$ 5

যদি $u = x \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + y \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, তেন্তে (1,1) বিন্দুত $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) If

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

show that $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ 5

যদি $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

তেন্তে দেখুওৱা যে, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$

(d) (i) State Euler's theorem on homogeneous function and verify it for the function $u = \frac{x\left(x^3 - y^3\right)}{x^3 + y^3}$ 5

সুষম ফলনৰ ইউলাৰৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু ইয়াৰ সত্যতা u ফলনৰ বাবে পৰীক্ষা কৰা য'ত $u = \frac{x\left(x^3 - y^3\right)}{x^3 + y^3}$

(ii) If $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{\lfloor 2}f''(\theta h)$, $0 < \theta < 1$, find θ when $h = 7$ and $f(x) = \frac{1}{1+x}$. 5

যদি $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{\lfloor 2}f''(\theta h)$

$0 < \theta < 1$, তেন্তে θ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত $h = 7$ আৰু $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(e) Using Maclaurin's theorem, expand $\cos x$ in ascending powers of x.
মেক্‌লৰিনৰ উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি $\cos x$ ক উৰ্ধ্বগামী x ৰ ঘাতত প্ৰসাৰ কৰা।

(f) (i) State Lagrange's mean value theorem and verify it for the function $f(x) = \log x$ in $[1, e]$ 2+3=5

লেগৰাঞ্জেছ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তিটো লিখা আৰু ইয়াৰ সত্যতা ফলন $f(x) = \log x$ ৰ বাবে $[1, e]$ অন্তৰালত প্ৰমাণ কৰা।

(ii) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ 2½+2½=5

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\log \tan x}{\log x}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)}{x \sin x}$

(g) If $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, prove that
$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\}\{(n-4)^2 - m^2\}....(4^2 - m^2)(2^2 - m^2)(-m^2)$$
যদি $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,
$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\}\{(n-4)^2 - m^2\}....(4^2 - m^2)(2^2 - m^2)(-m^2)$$

(h) (i) Let $f(x) = (x-a)\cos\left(\frac{1}{x-a}\right)$ for $x \neq a$ and let $f(a) = 0$. Show that f is continuous at $x = a$ but not derivable at that. 5

ধৰা হ'ল $f(x) = (x-a)\cos\left(\frac{1}{x-a}\right)$, $x \neq a$ আৰু ধৰা হ'ল $f(a) = 0$ । দেখুওৱা যে f ফলন $x = a$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু অৱকলন নহয়।

(ii) Let $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}+\cos x, & \text{if } x \neq 0 \\ 2 & \text{, if } x=0 \end{cases}$

Show that $f(x)$ is continuous at $x=0$. 5

ধৰা হ'ল $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}+\cos x, & \text{if } x \neq 0 \\ 2 & \text{, if } x=0 \end{cases}$

দেখুওৱা যে $f(x)$ ফলন $x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(i) (i) If $u=\tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, prove that

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u$. Hence deduce that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(2\cos 2u-1)\sin 2u$$

5+2=7

যদি $u=\tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u$ । ইয়াৰ পৰা সাব্যস্ত কৰা যে

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(2\cos 2u-1)\sin 2u$$

(ii) If $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$, show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ 3

যদি $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$, দেখুওৱা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

(j) (i) Show that the function

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0, y=0 \end{cases}$$

is continuous at (0,0) 5

দেখুওৱা যে ফলন

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0, y=0 \end{cases}$$

(0,0) বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(ii) Using Lagrange's mean value theorem in $[a, b]$. Prove that

$$\frac{b-a}{1+b^2} \langle \tan^{-1} b - \tan^{-1} a \langle \frac{b-a}{1+a^2}$$ for positive values of a, b. 5

লেগৰাঞ্জেছ মধ্যমান উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি $[a, b]$ অন্তৰালত, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{b-a}{1+b^2} \langle \tan^{-1} b - \tan^{-1} a \langle \frac{b-a}{1+a^2},$$

a, b ধনাত্মক মানৰ বাবে।

OPTION-B

Paper : MAT–HG–1026

(Honours Generic)

(Analytical Geometry)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer ***any ten*** questions : 1×10=10

যিকোনো দহটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ

(i) What is the locus represented by the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$?

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণটোৱে কি সঞ্চাৰপথ সূচায় ?

(ii) If the lines $y = mx$ and $y = m'x$ are conjugate diameters of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, then write down the value of mm'.

যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ $y = mx$ আৰু $y = m'x$ দুভাগ সংযুগ্ম ব্যাস হয়, তেন্তে mm' ৰ মান লিখা।

(iii) Write down the parametric form of the equation of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ সমীকৰণটোক প্ৰাচলিক ধৰণত লিখা।

(iv) What is the general equation of a plane parallel to x-axis?

x-অক্ষৰ সমান্তৰাল হোৱা সাধাৰণ সমতলৰ সমীকৰণ কি?

(v) Write down the centre and radius of the sphere given by the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

সমীকৰণৰ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ লিখা।

(vi) Write the condition, if $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents a pair of perpendicular lines.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ই, এযোৰ পৰস্পৰ লম্বভাৱে থকা সৰল ৰেখা নিৰূপণ কৰাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা।

(vii) Write the condition that the general equation of the second degree $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ may represent a pair of straight lines?

দ্বিতীয় ঘাতৰ সাধাৰণ সমীকৰণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ য়ে যোৰ সৰলৰেখা বুজোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

(viii) Define a conic.

শংকু এটাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(ix) Write the equation of the normal to the parabola $y^2 = 4ax$ at $\left(am^2, -2am\right)$.

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ $\left(am^2, -2am\right)$ বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণটো লিখা।

(x) For what values of a, the transformation $x = x' + 2,\ y = ay' - 3$ is a translation?

a ৰ কি মানৰ বাবে $x = x' + 2,\ y = ay' - 3$ ৰূপান্তৰটো এটা স্থানান্তৰ?

(xi) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুগ্ম ব্যাসৰ সংজ্ঞা লিখা।

(xii) Find parametric equations of the line passing through (4, 2) and parallel to $\bar{v} = (-1, 5)$.

(4, 2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা $\vec{v} = (-1, 5)$ ৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(xiii) Find the distance between the points (1,–2,0) and (4,0,5).

(1,–2,0) আৰু (4,0,5) বিন্দু দুটিৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

(xiv) If $\vec{u} = i - 3j + 2k$ and $\vec{v} = i + j$, find the magnitude of $\vec{u} + \vec{v}$.

যদি $\vec{u} = i - 3j + 2k$ আৰু $\vec{v} = i + j$, তেন্তে $\vec{u} + \vec{v}$ ৰ মাপাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(xv) Define dot product of *two* vectors.

দুটা ভেক্টৰ অদিশ পূৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(xvi) Find the unit vector that has the same direction as $\vec{u} = i - 2j + 2k$.

$\vec{u} = i - 2j + 2k$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(xvii) What is the value of $i.(i \times j)$?

$i.(i \times j)$ ৰ মান কি?

(xviii) Find the point on the conic $\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2}\cos\theta$ whose radius vector is 4.

$\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2}\cos\theta$ শাংকৱৰ ওপৰত থকা বিন্দু এটা নিৰ্ণয় কৰা য'ত ব্যাসাৰ্ধ ভেক্টৰ 4।

2. Answer ***any five*** questions : 2×5=10

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the equation of the line $3x + 4y - 10 = 0$ when the origin is transferred to the point (2,1).

মূলবিন্দুক (2,1) বিন্দুলৈ স্থানান্তৰ কৰিলে $3x + 4y - 10 = 0$ সমীকৰণটোৰ কি ৰূপান্তৰ হ'ব যদিহে অক্ষদ্বয়ক কোনো দিশতে ঘুৰোৱা নহয়।

(b) If the *two* pair of lines

$x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ and

$x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ be such that each pair bisects the angle between the other pair, prove that $pq + 1 = 0$.

যদি $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ আৰু

$x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ সৰলৰেখা দুযোৰৰ প্ৰতিযোৰেই আনযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক হ'য়, প্ৰমাণ কৰা যে $pq + 1 = 0$

(c) Find the angle between the vector $\vec{u} = 3i - 4j + 12k$ and $\vec{v} = -4i - 3k$.

$\vec{u} = 3i - 4j + 12k$ আৰু $\vec{v} = -4i - 3k$ ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Find the vertex and focus of the parabola $4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$.

$4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$ অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু আৰু নাভি উলিওৱা।

(e) Find the centre of the ellipse $2x^2 + 3y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$

$2x^2 + 3y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$ উপবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Define pole and polar of a conic.

এটা শাংকৱৰ ধ্ৰুৱবিন্দু আৰু ধ্ৰুৱীয়ৰেখাৰ সংজ্ঞা লিখা।

(g) Prove that the equation $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ represents *two* lines and find their point of intersection.

প্ৰমাণ কৰা যে, $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ ই এযোৰ সৰলৰেখা নিৰূপণ কৰে আৰু ইহঁতৰ ছেদবিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Find the angle between the lines represented by the equation

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণে নিৰূপণ কৰা সৰলৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) Find the joint equation of the straight lines which bisect the angles between the *two* lines given by $3x^2+6xy-y^2=0$.

$3x^2+6xy-y^2=0$ ৰেখাদ্বয়ৰ মধ্যৱৰ্তী কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ যৌথ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(j) Find the direction cosines of the vector $\vec{u}=2i+3j+4k$.

$\vec{u}=2i+3j+4k$ ভেক্টৰৰ দ্বিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Transform the equation $x^2+2xy\tan 2\alpha-y^2=a^2\sec 2\alpha$ to rectangular axes inclined at angle α to the old rectangular axes.

$x^2+2xy\tan 2\alpha-y^2=a^2\sec 2\alpha$ সমীকৰণটোক নতুন কাৰ্টেচীয় অক্ষসাপেক্ষে ৰূপান্তৰ কৰা য'ত নতুন অক্ষদ্বয়ে পুৰণা অক্ষদ্বয়ৰ লাগত α কোণ কৰে।

(b) Find the equation of the pair of tangents from a given point (x_1, y_1) to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) ৰ পৰা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকযোৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Show that the product of the perpendiculars from any point (x_1, y_1) on the lines given by $ax^2+2hxy+by^2=0$ is

$$\frac{ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

দেখুওৱা যে $ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুডালৰ ওপৰত যিকোনো বিন্দু (x_1, y_1) ৰ পৰা টনা লম্ব দুডালৰ পূৰণ ফল

$$\frac{ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

(d) Find the equation of the tangent at (x_1, y_1) on the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৱৰ (x_1, y_1) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Find the centre of the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. Hence show that parabola is a non-central conic.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৱৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে, অধিবৃত্ত এটা অকেন্দ্ৰিয় শাংকৱ।

(f) Find a vector that is orthogonal to both of the vectors $\vec{u} = 2i - j + 3k$ and $\vec{v} = -7i + 2j - k$.

$\vec{u} = 2i - j + 3k$ আৰু $\vec{v} = -7i + 2j - k$ ভেক্টৰ দুটিৰ উভয়ৰে লম্ব হোৱা ভেক্টৰ এটি নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Find the equation of the directrix of the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ শাংকৱটোৰ নিয়মিকা নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Find the asymptotes of the hyperbola $xy + ax + by = 0$.

$xy + ax + by = 0$ পৰাবৃত্তৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয় নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer ***any four*** questions : 10×4=40

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) (a) Show that $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ is numerically equal to the volume of the parallelopiped of which the three concurrent edges are $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. 5

দেখুওৱা যে $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ এ $\vec{a}, \vec{b}$ আৰু $\vec{c}$ ৰ দ্বাৰা কৌণিক বাহু তিনিটা নিৰ্দেশ কৰা চৌপলটোৰ আয়তন বুজায়।

(b) Find the equation of the line in 3-space that passes through the points (2,3,4) and (0,–1,2). 5

(2,3,4) আৰু (0,–1,2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) (a) Find the area of the triangle that is determined by the points $P(5,-2,1)$, $Q(2,4,2)$ and $Q(3,4,5)$. 5

$P(5,-2,1)$, $Q(2,4,2)$ আৰু $Q(3,4,5)$ বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Find the vector and scalar projections of $\vec{u}=2i+3j+5k$ onto $\vec{v}=2i-2j-k$. 5

$\vec{v}=2i-2j-k$ ভেক্টৰৰ ওপৰত $\vec{u}=2i+3j+5k$ ৰ সদিশ আৰু অদিশ প্ৰক্ষেপ নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) (a) Find the equation of the bisectors of the angles between the pair of lines given by $ax^2+2hxy+by^2=0$.

$ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Find the equation of the polar of $P(x_1, y_1)$ with respect to the conic $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$. 5

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ শাংকৰ সাপেক্ষে $P(x_1, y_1)$ ৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(iv) (a) Find λ such that the equation $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+\lambda=0$ may represent a pair of straight lines. 5

$12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+\lambda=0$ এ দুডাল সৰলৰেখা বুজালে λ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Find the polar equation of a circle. 5

এটা বৃত্তৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(vii) (a) If the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a pair of parallel straight lines, show that

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}.$$ 5

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখাক বুজালে

দেখুওৱা যে $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$

(b) If l and l' are the lengths of the two segments of a focal chord, prove that $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$, where $(a, 0)$ is the focus of the conic. 5

কোনো এভাল নাভি জ্যাৰ অংশ দুটি l আৰু l' হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$ য'ত $(a, 0)$ হ'ল শংকুৰ নাভি।

(ix) (a) If e_1 and e_2 be the eccentricities of a hyperbola and its conjugate, show that $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$. 5

সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত এযোৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা e_1 আৰু e_2 হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$

(b) If $\left(at_1^2,\ 2at_1\right)$ and $\left(at_2^2,\ 2at_2\right)$ are the two end points of a focal chord of the parabola $y^2=4ax$, prove that $t_1t_2=-1$. 5

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বীয় জ্যা এডালৰ দুই মূৰৰ বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক $\left(at_1^2,\ 2at_1\right)$ আৰু $\left(at_2^2,\ 2at_2\right)$ হ'লে, প্ৰমাণ কৰা $t_1t_2=-1$।

(x) (a) Prove that the eccentric angles of the extremities of two conjugate semi-diameters of an ellipse differ by a right angle. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা উপবৃত্তৰ দুডাল অনুবন্ধী অৰ্ধব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দুৰ উপকেন্দ্ৰিক কোণৰ পাৰ্থক্য এক সমকোণ।

(b) If the polars of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) w.r. to $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ are at right angles, then show that $b^4x_1x_2+a^4y_1y_2=0$. 5

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পৰাবৃত্ত সাপেক্ষে (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2) বিন্দুৰ ধ্ৰুৱীয় ৰেখা দুডাল লম্বমান হ'লে দেখুওৱা যে

$$b^4x_1x_2+a^4y_1y_2=0$$