Total number of printed pages–28

3 (Sem–2/CBCS) MAT HG 1/2, RC

2023

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Answer the Questions from any one Option.

OPTION – A

(Algebra)

Paper : MAT–HG–2016/MAT–RC–2016

Full Marks : 80

Time : Three hours

OPTION – B

(Discrete Mathematics)

Paper : MAT–HG–2026

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

Contd.

OPTION – A

(Algebra)

Paper : MAT–HG–2016/MAT–RC–2016

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) State true *or* false :

শুদ্ধ *নে* অশুদ্ধ লিখা ঃ

Every permutation has an inverse.

প্ৰত্যেকটো বিন্যাসেই প্ৰতিলোমনীয়।

(b) Give an example of a finite abelian group with respect to operation addition.

যোগ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে এটা সসীম এবেলীয় সংঘৰ উদাহৰণ দিয়া।

(c) Find the least positive integer that is congruent to (3+19+23+52) (*mod* 6).

(3+19+23+52) (*mod* 6)-ৰ সৰ্বসম হোৱাকৈ ক্ষুদ্ৰতম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাটো উলিওৱা।

(d) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা ঃ

If x, y and z be elements of a group G, then the element $(xyz)^{-1}$ is equal to ______.

যদি x, y আৰু z এটা সংঘৰ মৌল হয়, তেন্তে $(xyz)^{-1}$ মৌলটো ______ ৰ সমান হয়।

(e) Define symmetric function.

সমমিত ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(f) If $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ and $B = [1 \; -1 \; 0]$, find AB.

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ আৰু $B = [1 \; -1 \; 0]$ হয়, তেন্তে AB উলিওৱা।

(g) Give an example of a non-trivial subgroup of the group of complex numbers $\mathbb{C}$ with respect to operation multiplication.

পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে জটিল সংখ্যাৰ সংঘ $\mathbb{C}$ ৰ এটা অনিৰ্ৰ্থক উপসংঘৰ উদাহৰণ দিয়া।

(h) Choose the correct option :

শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা ঃ

The rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ is

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ কোটি হয়

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(i) Find the value of $e^{i\pi}+1$.

$e^{i\pi}+1$ ৰ মান উলিওৱা।

(j) State true *or* false :

শুদ্ধ *নে* অশুদ্ধ লিখা ঃ

The reduced echelon form of a matrix is always unique.

এটা মৌলকক্ষৰ লঘুকৃত এচেলন ৰূপ সদায় অদ্বিতীয় হয়।

2. Answer the following : 2×5=10

তলত দিয়াবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Construct—

(i) a matrix A which is Hermitian but not symmetric.

(ii) a matrix B which is symmetric but not Hermitian.

গঠন কৰা—

(i) এটা মৌলকক্ষ A যিটো হাৰ্মিছিয়ান হয় কিন্তু সমমিত নহয়।

(ii) এটা মৌলকক্ষ B যিটো সমমিত হয় কিন্তু হাৰ্মিছিয়ান নহয়।

(b) Let $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ and $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ are defined by

$$f(n) = 2n \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{Z}$$

and $g(n) = \begin{cases} n/2, \text{ if } n \text{ is even} \\ 4 \text{ ; if } n \text{ is odd} \end{cases}$

Check whether mapping g is a left inverse for f or not under the operation composition.

ধৰা হ'ল $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ আৰু $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ এনেদৰে সংজ্ঞাবদ্ধ য'ত—

$$f(n) = 2n \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{Z}$$

আৰু $g(n) = \begin{cases} n/2, \text{ যদি } n \text{ যুগ্ম} \\ 4, \text{ যদি } n \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$

ফলনৰ সংযোজন প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে g ফলনটো f ৰ বাওঁ প্ৰতিলোম হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

(c) If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, then prove that

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ where } \Delta = ad - bc \cdot$$

যদি $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ য'ত } \Delta = ad - bc$$

(d) If $\frac{x^3}{p} + x + 1 = 0$ is a cubic equation for some $p \neq 0$, then find $\sum \alpha$, $\sum \alpha\beta$ where α, β and γ are the roots of the equation.

যদি $\frac{x^3}{p} + x + 1 = 0$, $p \neq 0$ সাপেক্ষে এটা ত্ৰিঘাত সমীকৰণ হয়, তেন্তে $\sum \alpha$, $\sum \alpha\beta$ ৰ মান উলিওৱা য'ত α , β আৰু γ সমীকৰণটোৰ মূল হয়।

(e) If $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, then express $B = EA$, where E is an elementary matrix.

যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ আৰু $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ হয়, তেন্তে B ক EA ৰূপত প্ৰকাশ কৰা য'ত E এটা মৌলিক মৌলকক্ষ হয়।

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Let $*$ be a binary operation defined on $\mathbb{Z}$ where $x*y=x+y+1 \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$. Determine whether $\mathbb{Z}$ is a group with respect to operation $*$. Is it abelian? 4+1=5

ধৰা হ'ল '$*$' $\mathbb{Z}$ ত সংজ্ঞাবদ্ধ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া য'ত $x*y=x+y+1 \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$. প্ৰক্ৰিয়া '$*$' সাপেক্ষে $\mathbb{Z}$ এটা সংঘ হয়নে নহয় নিৰ্ণয় কৰা। এইটো এবেলীয় সংঘ হয়নে?

(b) Reduce the matrix A to identify pivot positions, basic columns and also determine the rank where

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3 & 4\end{bmatrix}$$ 2+1+1+1=5

A মৌলকক্ষটো লঘুকৃত কৰি পিভেট স্থান আৰু মূল স্তম্ভবোৰ চিনাক্ত কৰা আৰু লগতে কোটি নিৰ্ণয় কৰা

য'ত $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3 & 4\end{bmatrix}$

(c) Prove that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H$ imply $ab^{-1} \in H$.

প্ৰমাণ কৰা যে G সংঘৰ এটা অৰিক্ত উপসংহৃতি H নিজে G ৰ এটা উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে $a, b \in H$ হ'লে $ab^{-1} \in H$ হয়।

(d) (i) The equation $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$ has two pairs of equal roots. Find them. 4

$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$ সমীকৰণটোৰ দুযোৰ সমান মূল আছে। মূলকেইটা উলিওৱা।

(ii) State true **or** false : 1

শুদ্ধ *নে* অশুদ্ধ লিখা ঃ

All roots of the equation $x^3+x^2+x+1=0$ are imaginary.

$x^3+x^2+x+1=0$ সমীকৰণটোৰ আটাইকেইটা মূলেই কাল্পনিক।

(e) Prove that for any $m \times n$ matrix A, rank (A) = rank (A^T), where A^T is the transpose of A.

A যিকোনো এটা $m \times n$ মৌলকক্ষ হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে rank (A) = rank (A^T) য'ত A^T হৈছে A ৰ পক্ষান্তৰিত মৌলকক্ষ।

(f) Determine the general solution of the following non-homogeneous system :

তলৰ অসমাংগ সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সাধাৰণ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$x+2y+z+2\omega=3$$

$$2x+4y+z+3\omega=4$$

$$3x+6y+z+4\omega=5.$$

4. Answer **either** 4(*a*) **or** 4(*b*) :

উত্তৰ কৰা 4(*a*) ***অথবা*** 4(*b*) ঃ

(a) (i) Prove that the relation $a \equiv b \pmod n$ is an equivalence relation on $\mathbb{Z}$. 5

প্ৰমাণ কৰা যে $a \equiv b \pmod n$ সম্বন্ধটো $\mathbb{Z}$ ত এটা সমতুল্য সম্বন্ধ।

(ii) Solve the following system of congruences : 5

তলত দিয়া কনগোৰেঞ্চ প্ৰণালীটো সমাধান কৰা ঃ

$$x \equiv 2 \pmod 5$$

$$x \equiv 3 \pmod 8$$

(b) (i) Define cyclic group. Find the generators of the cyclic group $\mathbb{Z}_6$. 1+4=5

চক্ৰীয় সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। $\mathbb{Z}_6$ চক্ৰীয় সংঘটোৰ জনককেইটা উলিওৱা।

(ii) Let $a \in G$ be any element of a group G. If $a^n \neq e$ for any positive integer n, where e is the identity in G, then prove that $< a >$ is an infinite cyclic group. 5

ধৰা হ'ল G সংঘটোৰ a যিকোনো এটা মৌল। যদিহে প্ৰতিটো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে $a^n \neq e$ হয়, য'ত e হৈছে সংঘটোৰ একক মৌল, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $< a >$ এটা অসীম চক্ৰীয় সংঘ।

5. Answer **either** 5(a) **or** 5(b):

উত্তৰ কৰা 5(a) **অথবা** 5(b) ঃ

(a) (i) For the supgroup $K = \{(1), (1,2)\}$ of S_3 (here S_3 is the permutation group of order 6), find Ka and aK where $a = (1, 2, 3)$. 3

S_3 ৰ উপসংঘ $K = \{(1), (1,2)\}$ ৰ বাবে Ka আৰু aK উলিওৱা, য'ত $a = (1, 2, 3)$ ইয়াত S_3 হৈছে 6 মাত্ৰাবিশিষ্ট বিন্যাস সংঘ।

(ii) Prove that the set $E = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ of all even integers is a ring with respect to usual addition and multiplication. 7

প্ৰমাণ কৰা যে যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি $E = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ টো সাধাৰণ যোগ আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে এটা বলয় হয়।

(b) (i) If A and B are non-singular matrices, then prove that AB is also non-singular such that

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ and}$$

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}.$$ 3½×2=7

যদি A আৰু B অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে ABও এটা অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ যাতে $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ আৰু $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ ।

(ii) Find the matrix X such that $X = AX + B$ where $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. 3

X মৌলকক্ষটো উলিওৱা যাতে $X = AX + B$ হয়, য'ত $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ।

6. Answer ***either*** 6(*a*) ***or*** 6(*b*) :

উত্তৰ কৰা ঃ 6(*a*) ***অথবা*** 6(*b*)ঃ

(*a*) (*i*) Solve the equation $z^6 - z^3 - 2 = 0$ for $z \in \mathbb{C}$. 6

$z \in \mathbb{C}$ ৰ বাবে $z^6 - z^3 - 2 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(*ii*) Find all the square roots of -21^o. 4

-21^o ৰ সকলো বৰ্গমূল উলিওৱা।

(*b*) (*i*) For the cubic equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find $\sum \alpha^2$ and $\sum \alpha^3$ where α, β, γ are the roots of the equation. 2+3=5

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ত্ৰিঘাত সমীকৰণটোৰ বাবে $\sum \alpha^2$ আৰু $\sum \alpha^3$ উলিওৱা য'ত α, β, γ সমীকৰণটোৰ মূল হয়।

(*ii*) Find in terms of p, q and r, the values of the symmetric function $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma\alpha} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$ where α, β and γ are the roots of the cubic equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. 5

p, q আৰু r ৰ সহায়ত $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma\alpha} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$ সমমিত ফলনটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত α, β আৰু γ হৈছে $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ত্ৰিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল।

7. Answer **either** 7*(a)* **or** 7*(b)*:

উত্তৰ কৰা 7*(a)* অথবা 7*(b)* ঃ

(a) *(i)* Define reduced row echelon form of a matrix. Examine whether the system $Ax = b$ is consistent where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Also show b as linear combination of the basic columns in A. 2+3+2=7

লঘুকৃত শাৰী এচেলন ৰূপৰ সংজ্ঞা দিয়া। $Ax = b$ প্ৰণালীটো সুসংহত হয়নে পৰীক্ষা কৰা য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} ।$$

লগতে b ক A মৌলকক্ষৰ মূল স্তম্ভকেইটাৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে দেখুওৱা।

(ii) Find the general solution of the following homogeneous system (if exist) : 3

তলৰ সমাংগ সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা (যদিহে আছে) ঃ

$$x + 2y + z = 0$$

$$2x + 4y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0$$

(b) *(i)* Prove that every equation of n degree has n roots and no more. 5

প্ৰমাণ কৰা যে n ঘাতৰ প্ৰত্যেকটো সমীকৰণৰ n টাহে মূল আছে, তাতকে বেছি নাই।

(ii) Find the equation whose roots are $-3, -1, 4$. 2

$-3, -1, 4$ মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো উলিওৱা।

(iii) Form a rational cubic equation which shall have the roots $1,\ 3 + 2\sqrt{-1}$. 3

1 আৰু $3 + 2\sqrt{-1}$ মূল হিচাপে থকা পৰিমেয় ত্ৰিঘাত সমীকৰণটো গঠন কৰা।

OPTION – B

(*Discrete Mathematics*)

Paper : MAT–HG–2026

1. Answer the following questions : 1×10=10
তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Consider the set $\mathbb{Z}$ of integers with the relation divisibility. Is the relation a partial ordering of $\mathbb{Z}$?
ধৰা হ'ল $\mathbb{Z}$ এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি বিভাজ্যতাৰে সম্পৰ্ক কৰা। সম্পৰ্কটো $\mathbb{Z}$ ত আংশিক ক্ৰম হ'বনে?

(b) A poset in which every pair of elements has both a least upper bound and a greatest lower bound is termed as
এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি যাৰ প্ৰত্যেক যোৰ সংখ্যাৰ এটা লঘিষ্ঠ উচ্চ সীমা (l.u.b) আৰু গৰিষ্ঠ নিম্ন সীমা (g.l.b) থাকে, তাক কোৱা হয়

(i) sublattice
উপজালী

(ii) lattice
জালী

(iii) trail
ট্ৰেইল

(iv) walk
ৱাক

(Choose the right answer)
(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(c) _____ and _____ are the two binary operations defined for lattices.
_____ আৰু _____ জালীত ব্যৱহাৰ হোৱা দুটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(i) Join, meet
সংযোগ, সন্ধি

(ii) Addition, subtraction
যোগ, বিয়োগ

(iii) Union, intersection
মিলন, ছেদন

(iv) Multiplication, modulo division
পূৰণ, হৰণ মডুল

(Fill in the blanks)
(খালী ঠাই পূৰণ কৰা)

(d) State True **or** False :
শুদ্ধ / অশুদ্ধ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

Complements are unique in a complemented lattice.
পূৰকযুক্ত জালীৰ পূৰকবোৰ অনন্য হয়।

(e) Let L be a lattice and $p \in L$. Is $\{p\}$ a sublattice?
ধৰা হ'ল L এটা জালী আৰু $p \in L$ । $\{p\}$ এটা উপজালী নেকি?

(f) Let $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ be a Boolean algebra. Find the value of $(1 \wedge 0) \vee (0 \vee 1)'$

ধৰা হ'ল $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ এটা বুলীয় বীজগণিত। $(1 \wedge 0) \vee (0 \vee 1)'$ ৰ মান উলিওৱা।

(g) Find the dual of the Boolean expression

$x \wedge (y \vee 0)$

বুলীয় অভিব্যক্তি $x \wedge (y \vee 0)$ ৰ দ্বিতীয় মান উলিওৱা।

(h) Define bounded lattice.

পৰিবদ্ধ জালীৰ সংজ্ঞা লিখা।

(i) What do you mean by Boolean function?

বুলীয় ফলন বুলিলে কি বুজা?

(j) How many different Boolean functions of degree n are there?

n-ঘাতৰ কিমান বিভিন্ন বুলীয় ফলন থাকিব?

2. Answer the following questions: 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা:

(a) Show that the following posets are not lattices:

$L_1 = (\{1, 2, 3, \ldots 12\}, 1)$

$L_2 = (\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}, 1)$

where 1 is being defined as m/n if m divides n.

দেখুওৱা যে $L_1 = (\{1, 2, 3, \ldots 12\}, 1)$ আৰু $L_2 = (\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}, 1)$ আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি দুটা জালী নহয় য'ত m/n, যদি n, m ৰে বিভাজ্য।

(b) Let $(\mathbb{N}, \leq)$ be a partially ordered set, where $a \leq b <=> a/b$. Is it a chain?

ধৰা হ'ল $(\mathbb{N}, \leq)$ এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি, য'ত $a \leq b <=> a/b$ ই এটা শৃংখল নেকি?

(c) Find the values of the Boolean function represented by

তলৰ বুলীয় ফলনৰ মান উলিওৱা

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z'$$

Contd.

(d) Write the conjunctive normal form of the function

$$(x.y' + x.z)' + x'$$

$(x.y' + x.z)' + x'$ ফলনটো কন্‌জাংক্টিভ নৰ্মেল আকাৰ (CNF) ত প্ৰকাশ কৰা।

(e) Draw the circuit represented by the Boolean function

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge z$$

বৰ্তনী $f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge z$ অংকন কৰা।

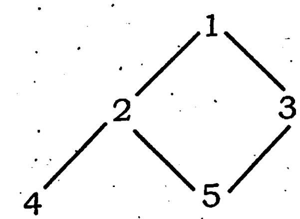
3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Show that the poset of the divisors of 60, ordered by divisibility is a latlice and interpret their meet and join.

দেখুওৱা যে 60-ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতি, বিভাজ্যতাৰে ক্ৰম কৰা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতিটো জালী হয় আৰু জালীটোৰ সন্ধি (meet) আৰু সংযোগ (join) ব্যাখ্যা কৰা।

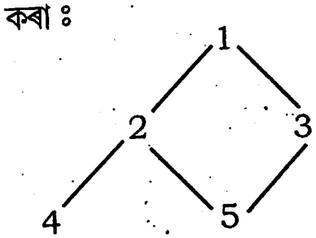
(b) Let $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ be ordered by the Hasse diagram.



(i) Find all minimal and maximal elements of A.

(ii) Does A have a first element or a last element ? Justify your answer. 2+3=5

তলৰ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ সংহতিটো Hasse চিত্ৰৰে ক্ৰম কৰা ঃ



(i) A ৰ সকলো সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন উপাদান উলিওৱা।

(ii) A ৰ বাবে প্ৰথম উপাদান বা শেষৰ উপাদান থাকিবনে? উত্তৰৰ ন্যায্যতা প্ৰদান কৰা।

Contd.

(c) Let L be a bounded distributive lattice. Then prove that if a complement exists, it is unique.

ধৰা হ'ল, L এটা পৰিবদ্ধ বিতৰণ বিধিযুক্ত জালী। তেনেহলে প্ৰমাণ কৰা যে যদি a ৰ পূৰক থাকে, তেন্তে পূৰকটো অনন্য।

(d) Prove that a Boolean algebra is self-dual.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বুলীয় বীজগণিত স্ব-দ্বিতীয় হয়।

(e) Put the function

$$\left[(x \wedge y')' \vee z'\right] \wedge (x' \vee z')'.$$

in the disjunctive normal form (DNF).

$\left[(x \wedge y')' \vee z'\right] \wedge (x' \vee z')'$. ফলনটো

দিচ্‌জাংক্টিভ নৰ্মেল আকাৰ (DNF) ত লিখা।

(f) Use a Karnaugh map to find a minimal sum for Boolean expression

$$E = xy + x'y + x'y'$$

Karnaugh map ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ বুলীয় অভিব্যক্তিৰ সৰ্বনিম্ন যোগফল (mimimal sum) নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$E = xy + x'y + x'y'$$

4. Answer the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Let $X = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$ be a set and a relation R on X is defined as $R = \{(x, y) \in R,\ x \text{ divides } y\}$.

(i) Construct Hasse diagram.

(ii) Find maximal and minimal elements.

(iii) Find chain and antichain.

(iv) Find maximum length of chain.

(v) Is poset a lattice?

ধৰা হ'ল $X = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$ এটা সংহতি আৰু R এটা সম্পৰ্ক X ত য'ত $R = \{(x, y) \in R,\ x \text{ divides } y\}$

(i) Hasse চিত্ৰ গঠন কৰা।

(ii) সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন উপাদান উলিওৱা।

(iii) 'চেইন' আৰু 'এন্টিচেইন' উলিওৱা।

(iv) 'চেইন'ৰ সৰ্বোচ্চ দীঘ কিমান?

(v) আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতিটো জালী হয়নে?

Or

(i) Let $S=\{a,b,c\}$ and $P(S)$ is the power set of S. Draw the Hasse diagram of the poset $P(S)$ with the partial order '$\subseteq$' (containment). 5

(ii) Explain why the power set lattice $P(\cup)$ is a distributive lattice for any set $\cup$. 5

(i) ধৰা হ'ল $S=\{a,b,c\}$ এটা সংহতি আৰু $P(S)$ টো S ৰ ঘাত সংহতি।
আংশিক ক্ৰম সম্পৰ্ক '$\subseteq$' সৈতে গঠন হোৱা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি $P(S)$ ৰ Hasse চিত্ৰটো অংকন কৰা।

(ii) যিকোনো সংহতি $\cup$ ৰ কাৰণে ঘাত সংহতি $P(\cup)$ কিয় বিতৰণবিধি যুক্ত জালী হয় ব্যাখ্যা কৰা।

(b) In a Boolean algebra $[B,+,\cdot,']$ prove that

(i) $a+b=lub\{a,b\}$

(ii) $a.b=glb\{a,b\}, \quad \forall\, a,b\in B$. 5+5=10

বুলীয় বীজগণিত $[B,+,\cdot,']$ ৰ কাৰণে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $a+b=lub\{a,b\}$

(ii) $a.b=glb\{a,b\}, \quad \forall\, a,b\in B$

Or

Define modular lattice. Prove that a lattice L is modular if and only if $x, y\in L$

$x\oplus(y*(x\oplus z))=(x\oplus y)*(x\oplus z)$ 2+8=10

মডিউলাৰ জালীৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে এটা জালী L মডিউলাৰ হব যদি আৰু যদিহে (if and only if) $x, y\in L$

$x\oplus(y*(x\oplus z))=(x\oplus y)*(x\oplus z)$

(c) State and prove De Morgan's laws in complemented and distributive lattice.
পূৰকযুক্ত জালী আৰু বিতৰণবিধিযুক্ত জালীৰ বাবে 'ডি মৰগেন সূত্ৰ' টো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

Or

Draw the circuit which realizes the function

$f(x,y,z,t)=x\wedge[(y\vee t')\vee(z\vee(x\vee t\vee z))]\wedge y$

বৰ্তনী

$f(x,y,z,t)=x\wedge[(y\vee t')\vee(z\vee(x\vee t\vee z))]\wedge y$

অংকন কৰা।

(d) Define atom of a Boolean algebra. Prove that every finite Boolean algebra has at least one atom. Prove that if p and q are atoms in a Boolean algebra such that $p\neq q$ then $p\wedge q=0$. 1+5+4=10

Contd.

এটা বুলীয় বীজগণিতৰ 'এটম'ৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো সসীম বুলীয় বীজগণিতত অন্ততঃ এটা 'এটম' থাকে। প্ৰমাণ কৰা যে যদি p আৰু q এটা বুলীয় বীজগণিতৰ 'এটম' হয় য'ত $p \neq q$, তেনে হ'লে $p \wedge q = 0$ ।

Or

Consider the Boolean algebra D_{210}.

(i) List its elements and draw its diagram.

(ii) Find the set A of atoms.

(iii) Find two subalgebras with eight elements

(iv) Is $X = \{1, 2, 6, 210\}$ a sublattice of D_{210}? Justify.

(v) Is $Y = \{1,2,3,6\}$ a sublattice of D_{210}? Justify.

বুলীয় বীজগণিত D_{210} ৰ

(i) উপাদানসমূহ উলিওৱা আৰু চিত্ৰটো অংকন কৰা।

(ii) 'এটম' ৰ সংহতি A মান উলিওৱা।

(iii) 8 টা উপাদান থকা দুটা উপবীজগণিত (subalgebras) নিৰ্ণয় কৰা।

(iv) $X = \{1, 2, 6, 210\}$, D_{210} ৰ এটা উপজালী হয়নে? উত্তৰৰ ন্যায্যতা প্ৰদান কৰা।

(v) $Y = \{1,2,3,6\}$, D_{210} ৰ এটা উপজালী হয়নে? উত্তৰৰ ন্যায্যতা প্ৰদান কৰা।